Eine leichte Methode alle Eigenschaften von Raumkurven zu finden*

Leonhard Euler

§1 Die Eigenschaften von Kurven, welche nicht ganz in derselben Ebene liegen und von den Geometern Kurven mit doppelter Krümmung genannt zu werden pflegen, werden zwar schon vor langer Zeit definiert gefunden: Aber die Analysis, mit welcher sie ausfindig gemacht worden sind, ist auf dermaßen komplizierte Figuren gestützt, dass sie nicht nur die größte Sorgfalt, sondern auch höchste Umsicht erfordern, damit die Darstellung der differentiellen Größen und daher der Differentiale zweiten Ordnung die Vorstellung trübt und zu Fehlern verleitet. Deswegen habe ich oft und viel darüber nachgedacht, ob dieselben Eigenschaften nicht mit einer leichteren Methode aus den ersten Elementen abgeleitet werden können, so dass es nicht notwendig ist, dermaßen komplizierte und fast undurchdringliche Figuren zu betrachten. Nach sorgfältiger Abwägung aller Schwierigkeiten habe ich schließlich erkannt, dass die ganze Aufgabe ziemlich bequem auf die sphärische Trigonometrie zurückgeführt wird und daher um vieles vollständiger behandelt werden kann, als es freilich mit der gewöhnlichen Methode bewerkstelligen lässt.

§2 Es wird aber förderlich sein, die Natur dieser Kurven, zumindest im Allgemeinen, auf gewohnte Weise zu betrachten, bevor wir die ganze Frage

*Originaltitel: "Methodus facilis omnia symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investigandi", zuerst publiziert in: *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1782: I* (1786, verfasst 1775): pp. 19–57, Nachdruck in: Opera Omnia: Series 1, Band 28, pp. 348 – 382, Eneström-Nummer E602, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

auf die Kugelgeometrie übertragen können. Nachdem also (Fig. 1)[1] nach Belieben drei zueinander senkrechte Achsen OA, OB, OC, die im festen Punkt O zusammenlaufen, festgelegt worden sind,

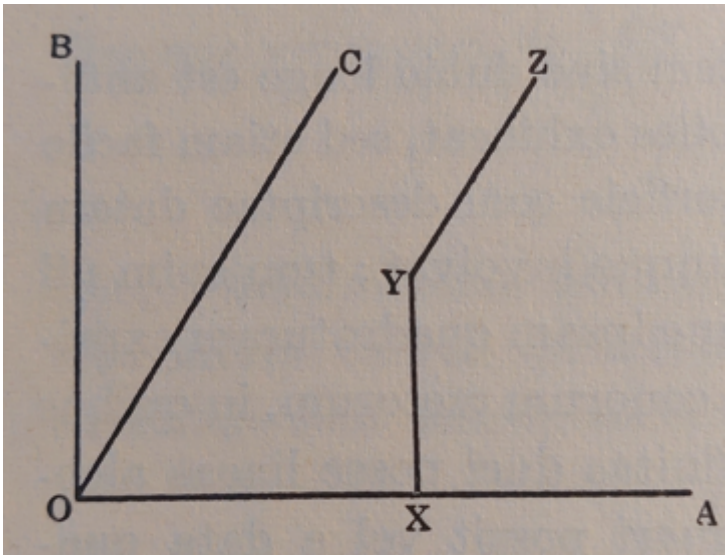


Fig. 1

sei Z irgendein Punkt einer solchen Kurve, dessen Lage durch die drei Koordinaten

$$OX = x, \quad XY = y, \quad YZ = z$$

bestimmt werde, welche Koordinaten jenen Achsen parallel sind und zwischen welchen zwei Gleichungen nötig sein werden, um die Natur der vorgelegten Kurve auszudrücken, weil ja für die Abszisse $OX = x$ jede der beiden übrigen y und z angegeben werden muss, dass der Punkt Z einen bestimmten Platz erhält. Aber alle Fragen, die über solche Kurven vorgelegt werden können, gehen im Allgemeinen darauf zurück, dass zuerst für den Punkt Z die Lage der Tangente in Bezug auf die drei Achsen definiert wird. Dann müssen aber auch die beiden benachbarten Kurvenelemente betrachtet werden, die, sofern sie nicht in dieselbe Richtung zeigen, eine bestimmte Ebene bestimmen werden, deren Lage in Bezug auf die Achsen oder in Bezug auf die drei Ebenen AOB, BOC und COA ausfindig gemacht werden muss. Schließlich

[1] Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

ist es auch notwendig, dass der Krümmungsradius für zwei solche Elemente untersucht wird und nicht nur seine Größe, sondern auch die Lage in Bezug auf die drei Achsen angegeben wird. Es ist aber ersichtlich, dass diese letzten Bestimmungen Differentiale zweiten Grades involvieren, deren Darstellung in einer Figur lästige Aufmerksamkeit zu verlangen pflegt.

§3 Vor allem wird es aber förderlich sein, dass die Rechnung so durchgeführt wird, dass keiner der drei Achsen in Bezug auf die übrigen Vorrang eingeräumt wird und alle in gleicher Weise auf ein und dasselbe bezogen werden können. Zu diesem Zweck wollen wir den Kurvenbogen, welchen wir $= s$ nennen wollen, als die wesentliche Variable in die Rechnung einführen und alle übrigen Variablen auf ihn zurückzuführen, sodass alle als Funktionen von s angesehen werden können. Für dieses Ziel wollen wir sofort von Anfang an

$$dx = pds, \quad dy = qds \quad \text{und} \quad dz = rds$$

setzen, woher, weil

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ist,

$$pp + qq + rr = 1$$

und daher durch Differenzieren

$$pdp + qdq + rdr = 0$$

sein wird. Dann hindert in der Tat nichts daran, dass wir das Element ds als konstant annehmen, weil es ja gleichermaßen auf die einzelnen Achsen bezogen wird, woher wir die Differentiale zweiten Grades

$$ddx = dpds, \quad ddy = dqds \quad \text{und} \quad ddz = drds$$

erlangen werden, und so werden wir auf diese Weise die zweiten Differentiale völlig vermeiden.

§4 Wir wollen nun (Fig. 2)[2] einzeln das Kurvenelement $Zz = ds$ betrachten, von welchem wir sehen wollen, wie es sich zu unseren drei Achsen verhält. Für dieses Ziel wollen wir vom Punkt Z aus die Geraden Zp, Zq und Zr zeichnen,

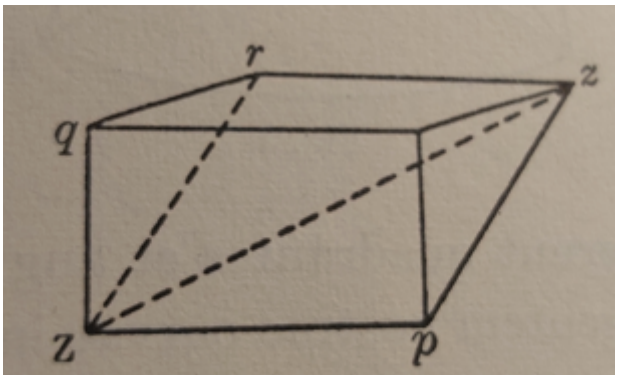


Fig. 2

die den Achsen parallel sind, und das Element Zz wird die Diagonale des Parallelepipeds gebildet von drei Seiten

$$Zp = dx = pds, \quad Zq = dy = qds \quad \text{und} \quad Zr = dz = rds;$$

daher ist klar, dass das Element Zz so zur Richtung Zp geneigt ist, dass der Kosinus des Winkels $zZp = p$, der Kosinus des Winkels $zZq = q$ und der Kosinus des Winkels $zZr = r$ ist, woher sich auch der Sinus dieser Winkel bestimmen lässt, sodass wir daher erhalten werden:

$$\begin{aligned} \cos zZp &= p, \quad \sin zZp = \sqrt{1-pp} = \sqrt{qq+rr}, \\ \cos zZq &= q, \quad \sin zZq = \sqrt{1-qq} = \sqrt{pp+rr}, \\ \cos zZr &= r, \quad \sin zZr = \sqrt{1-rr} = \sqrt{pp+qq}. \end{aligned}$$

Diese Formeln werden also zugleich die Lage der Tangente der Kurve in Z in Bezug auf die drei Achsen zeigen. Natürlich wird diese Tangente im Punkt Z zur Achse OA in dem Winkel geneigt sein, dessen

$$\text{Kosinus} = p \quad \text{und} \quad \text{Sinus} = \sqrt{qq+rr} \quad \text{ist,}$$

[2]Der Scan zeigt die Figur der Opera Onmia Version.

zur Achse OB im Winkel, dessen

$$\text{Kosinus} = q \quad \text{und} \quad \text{Sinus} = \sqrt{pp + rr} \quad \text{ist,}$$

zur Achse OC im Winkel, dessen

$$\text{Kosinus} = r \quad \text{und} \quad \text{Sinus} = \sqrt{pp + qq} \quad \text{ist.}$$

Und so haben wir schon der ersten Forderung über die Lage der Tangenten der Kurve in Bezug auf die drei Hauptachsen Genüge geleistet, und es war nicht nötig, auf die Kugelgeometrie auszuweichen.

§5 Man fasse nun (Fig. 3)[3] die Kugel um den Punkt Z herum beschrieben auf,

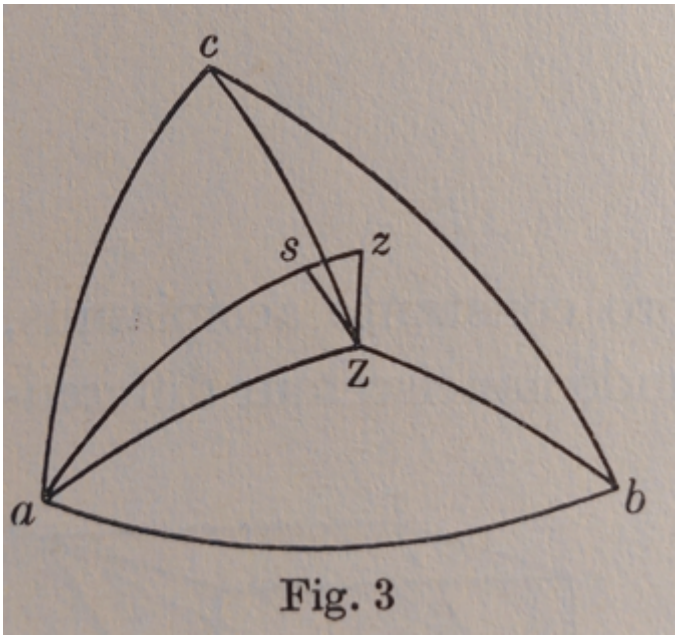


Fig. 3

welcher Punkt freilich in der Figur enthalten ist; zu ihrer Oberfläche verstehe man die drei den Hauptachsen OA, OB, OC parallelen Strahlen gezogen, welche die Oberfläche in den Punkten a, b, c schneiden. Auf diese Weise, nachdem die Großkreise ab, ac, bc gezeichnet worden sind, wird das Kugeldreieck abc entspringen, dessen einzelne Seiten Viertelkreise sein werden und dessen

[3]Der Scan zeigt die Abbildung der Opera Omnia Version

Winkel a, b, c rechte sein werden. Dann zeichne man aber vom Mittelpunkt Z aus entlang der Tangente unserer Kurve im Punkt Z den Strahl Zz, der auf der Oberfläche den Punkt z bezeichnet, woher, wenn man zu den Ecken hin die Bogen za, zb, zc zeichnet, sie die Neigung der Tangente Zz zu den drei Achsen Za, Zb, Zc messen werden, und daher wird

$$\cos az = p, \quad \sin az = \sqrt{1 - pp} = \sqrt{qq + rr},$$
$$\cos bz = q, \quad \sin bz = \sqrt{1 - qq} = \sqrt{pp + qq}$$

und

$$\cos cz = r, \quad \sin cz = \sqrt{1 - rr} = \sqrt{pp + qq}$$

sein. Aber außerdem, wenn die Bogen az, bz, cz bis hin zu den gegenüberliegenden Seiten verlängert aufgefasst werden, werden die einzelnen Viertelkreise sein, woher klar ist, dass die Tangente Zz zur Ebene aZb oder zur Ebene AOB (Fig. 1) in dem Winkel geneigt ist, dessen Sinus $= r$, zur Ebene BOC aber in dem Winkel, dessen Sinus $= p$, und zur Ebene AOC in dem Winkel, dessen Sinus $= q$ ist. Hier betrachten wir freilich den Radius der Kugel als mit der Einheit ausgedrückt, was dennoch nicht verhindert, dass danach der Radius dem Kurvenelement $Zz = ds$ gleich gesetzt wird.

§6 Auf diese Weise wird unser ganzes Kugeldreieck abc in die drei Kugeldreiecke abz, acz und bcz geteilt werden, in welchen die drei Seiten gegeben sein werden, woher man aus dem Dreieck baz

$$\cos baz = \frac{\cos bz + \cos ab \cos az}{\sin ab \sin az} = \frac{q}{\sqrt{qq + rr}}$$

berechnet. In gleicher Weise wird aus dem Dreieck caz

$$\cos caz = \frac{r}{\sqrt{qq + rr}}$$

sein. Weil aber der Winkel bac ein rechter ist, wird

$$\sin baz = \cos caz = \frac{r}{\sqrt{qq + rr}}$$

sein, woher folgt, dass

$$\tan baz = \frac{r}{q} \quad \text{und daher} \quad \tan caz = \frac{q}{r}$$

sein wird. In gleiche Weise wird

$$\tan abz = \frac{r}{p} \quad \text{und} \quad \tan cbz = \frac{p}{r},$$
$$\tan bcz = \frac{p}{q} \quad \text{und} \quad \tan acz = \frac{q}{p}$$

sein.

§7 Wenn wir nun die Größen p, q und r um ihre Differentiale vermehren, werden wir zur Lage der folgenden Tangente in Bezug auf die festen Achsen gelangen. Nachdem dies also gemacht worden ist, überführe man in der Figur den Punkt z zum Punkt z', und der Strahl Zz' wird die Lage des folgenden Kurvenelements sein, oder besser das folgendene Element wird diesem Strahl Zz' parallel sein, und der unendlich kleine Bogen zz' wird die Neigung dieser zwei benachbarten Kurvenelemente geben. Denn wenn der Krümmungsradius der Kurve $= R$ genannt wird, weil daher die Neigung dieser Elemente $\frac{ds}{R}$ ist, wird natürlich

$$\frac{ds}{R} = zz' \quad \text{und daher} \quad R = \frac{ds}{zz'}$$

sein. Außerdem, weil das folgende Element dem Strahl zz' parallel ist, während der Strahl Zz das Element des ersten bezeichnet, werden diese beiden Elemente in der Ebene zZz' sein, oder die Strecke zz' wird fortgesetzt den Großkreis liefern, der mit dieser Ebene zusammenkommt, deren Neigung zu den drei Hauptebenen sich also durch die Bogen ab, ac, bc bestimmt angeben lassen.

§8 Um diese Dinge auszuführen, wollen wir den Bogen $az = \alpha$ setzen, dass $\cos\alpha = p$ ist, und der Bogen wird $az' = \alpha + d\alpha$ sein, und nach Zeichnen des Lotes zs zum Bogen az', dass $ad = az = \alpha$ ist, wird der Abschnitt $sz' = d\alpha$ sein; weil aber α der Bogen ist, dessen Kosinus $= p$ ist, wird

$$d\alpha = -\frac{dp}{\sqrt{1-pp}} = -\frac{dp}{\sqrt{qq+rr}}$$

sein. In gleicher Weise wollen wir den Winkel $baz = \omega$ nennen, und der Winkel baz' wird $= \omega + d\omega$ und daher der Elementarwinkel $zaz' = d\omega$ sein; weil aber ω den Winkel bezeichnet, dessen Tangens $\frac{r}{q}$ ist, wird

$$d\omega = \frac{qdr - rdq}{qq + rr}$$

sein, welcher mit dem Sinus des Bogens $az = \sqrt{qq + zz}$ multipliziert das Element

$$zs = \frac{qdr - rdq}{\sqrt{qq + rr}}$$

liefern wird. Auf diese Weise wird also im charakteristischen Dreieck zsz' mit rechtem Winkel bei s, wegen der gegebenen Katheten sz und sz'

$$(zz')^2 = \frac{qqdr^2 - 2qrdqdr + rrdq^2 + dp^2}{qq + rr}$$

berechnet werden. Weil aber

$$pdp + qdq + rdr = 0$$

ist, wird

$$qdq + rdr = -pdp$$

und daher

$$qqdq^2 + 2qrdqdr + rrdr^2 = ppdp^2$$

sein, woher

$$2qrdqdr = ppdp^2 - qqdq^2 - rrdr^2$$

wird, welcher Wert oben eingesetzt

$$(zz')^2 = \frac{(qq + rr)dr^2 + (qq + rr)dq^2 + dp^2(1 - pp)}{qq + rr}$$

geben wird. Weil also $1 - pp = qq + rr$ ist, wird

$$(zz')^2 = dp^2 + dq^2 + dr^2$$

und daher

$$zz' = \sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}$$

werden.

§9 Nachdem also dieses Element zz' gefunden worden ist, findet man den Krümmungsradius der Kurve

$$R = \frac{ds}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}};$$

daher, weil wir

$$p = \frac{dx}{ds}, \quad q = \frac{dy}{ds}, \quad r = \frac{dz}{ds}$$

gesetzt haben, wird für konstant genommenes Element ds

$$dp = \frac{ddx}{ds}, \quad dq = \frac{ddy}{ds}, \quad dr = \frac{ddz}{ds}$$

werden, und so werden wir haben:

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2}}.$$

Aber wenn kein Element konstant gehalten wird, dass

$$dp = \frac{ddx}{ds} - \frac{dxdds}{ds^2},$$
$$dq = \frac{ddy}{ds} - \frac{dydds}{ds^2},$$
$$dr = \frac{ddz}{ds} - \frac{dzdds}{ds^2}$$

wird, wird

$$dp^2 + dq^2 + dr^2 = \frac{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2}{ds^2}$$
$$- \frac{2dds(dxddx + dyddy + dzddz)}{ds^3} + \frac{dds^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{ds^4}$$

sein, wo wegen $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ und $dxddx + dyddy + dzddz = dsdds$ diese Formel in diese übergehen wird:

$$\frac{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2 - dds^2}{ds^2},$$

und daher wird der allgemeine Ausdruck, wenn kein Element konstant gehalten wird, für den Krümmungsradius

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2 - dds^2}}$$

sein, welche Formel mit der gemeinen Analysis erst nach höchst langwierigen Rechnungen gefunden worden ist.

§10 Um nun auch die Lage der Ebene, in welche die beiden unendlich nahen Kurvenelemente liegen, ausfindig zu machen, suche man im charakteristischen Dreieck $zz's$ den Winkel $zZ's$, und aus all seinen bekannten Seiten erschließen wir die folgenden Formeln:

$$\sin zz's = \frac{qdr - rdq}{\sqrt{(qq + rr)(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}$$

und

$$\cos zz's = -\frac{dp}{\sqrt{(qq + rr)(dp^2 + dq^2 + dr^2)}},$$

und daher

$$\tan zz's = \frac{rdq - qdr}{dp},$$

und dieselben Formeln werden für den Winkel gelten, welchen die Strecke zz' rückwärts fortgesetzt mit dem Bogen az bildet, weil ja z und z' sich unendlich wenig unterscheiden.

§11 Man verlängere (Fig. 4)[4] in beliebiger Weise das gefundene Element zz',

[4]Der Scan zeigt die Abbildung der Opera Omnia Version.

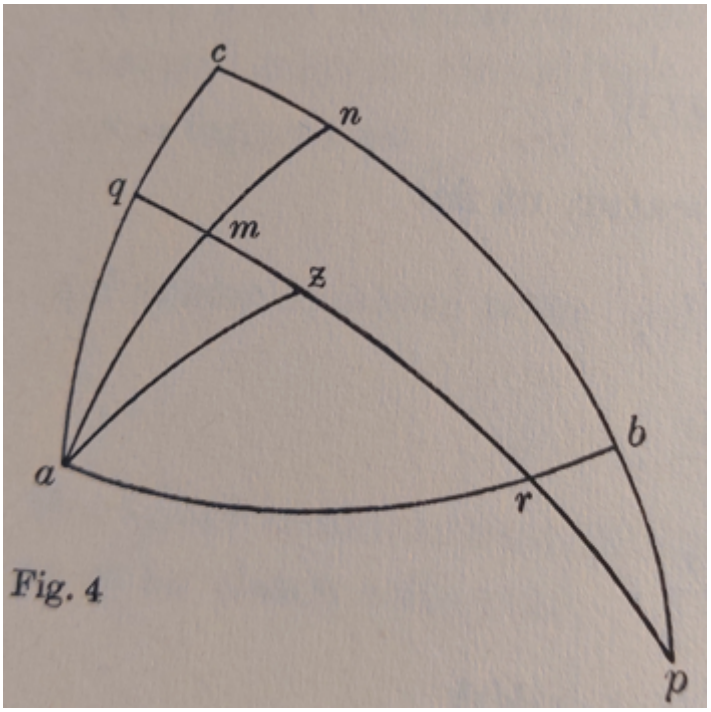


Fig. 4

bis es die Seiten unseres Dreiecks abc in den Punkten q, r und p schneidet, und wir haben gerade gesehen, wenn wir den Winkel $azr = \varphi$ nennen, dass

$$\sin\varphi = \frac{qdr - rdq}{\sqrt{(qq+rr)(dp^2+dq^2+dr^2)}}$$
$$\cos\varphi = -\frac{dp}{\sqrt{(qq+rr)(dp^2+dq^2+dr^2)}}$$

und

$$\tan\varphi = \frac{rdq - qdr}{dp}$$

sein wird, und daher müssen zuerst die Punkte p, q, r bestimmt werden, wo dieser Bogen die drei Seiten unseres Dreiecks schneidet, darauf auch die Winkel, welche jener in diesen Punkten mit den Seiten bildet. Damit dies leichter erledigt werden kann, wollen wir vom Punkt a aus zum Bogen qrp den Bogen am zeichnen, welcher verlängert die Seite bc in n schneide, und im rechtwinkligen Dreieck azm mit der Seite az ist der Winkel azm gegeben, woher man

$$\sin am = \sin az \sin azm = \frac{qdr - rdq}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}$$

und

$$\tan zm = \tan az \cos azm = \frac{dp}{p\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}$$

findet, schließlich wird

$$\tan zam = \frac{1}{\cos az \tan azm} = \frac{dp}{p(qdr - rdq)}$$

sein. Oben haben wir aber gesehen, dass $\tan zab = \frac{r}{q}$ ist, woher der Tangens der Summe dieser Winkel oder

$$\tan bam = \frac{pr(qdr - rdq) + qdp}{pq(qdr - rdq) - rdp}$$

wird, dessen Zähler wegen $rdr = -pdp - qdq$ auf diese Form reduziert wird:

$$(qq + rr)(qdp - pdq),$$

der Nenner hingegen auf diese

$$(qq + rr)(pdr - rdp),$$

woher

$$\tan bam = \frac{qdp - pdq}{pdr - rdp}$$

wird, und weil der Winkel bac ein rechter ist, wird

$$\tan mac = \frac{pdr - rdp}{qdp - pdq}$$

sein.

§12 Weil nun der Bogen an ein Viertelkreis ist und normal zum Bogen bc ist, wird

$$\cos mn = \frac{qdr - rdq}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}$$

sein, woher, weil die beiden Bogen mp und np demselben Bogen mn normal ausgerichtet sind, die beiden Viertelkreise sein werden und der Bogen mn das Maß des Winkels mpn sein wird, und so wird

$$\cos mpn = \cos qpc = \frac{qdr - rdq}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}$$

sein, und in diesem Winkel ist die gesuchte Ebene zur Ebene bc geneigt, oder in der ersten Figur zur Ebene BOC. Aber der Bogen am wird den Winkel messen, in welchem diese Ebene zur Achse OA geneigt ist, dessen Sinus also

$$\sin am = \frac{qdr - rdq}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}$$

sein wird.

§13 Nachdem aber der Winkel zpb gefunden worden ist, in welchem die gesuchte Ebene zur Ebene bc geneigt ist, wollen wir analog die Winkel erschließen, in welchen sie zu den beiden übrigen Seiten geneigt ist; natürlich wird der Kosinus der Neigung zur Ebene bc, das heißt zur Ebene CA,

$$= \frac{rdp - pdr}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}$$

und der Kosinus der Neigung zur Ebene AB

$$= \frac{pdq - qdp}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}$$

sein. Aber analog die folgenden, weil die erste Formel $\cos pcz$ war, der Reihe nach die Buchstaben a, b, c und p, q, r durchgehend, weil ja in den letzten Formeln ein Zweifel bestehen kann, ob sie sich auf die Winkel aqz und arz erstrecken, oder eher auf die Winkel pqz und brz, wird die Mehrdeutigkeit auf diese Weise beseitigt werden:

$$\cos cpz = \frac{qdr - rdq}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}},$$
$$\cos aqz = \frac{rdp - pdr}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}},$$
$$\cos brz = \frac{pdq - qdp}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}.$$

Dennoch können wir der Analogie nicht trauen, weil der Punkt p außerhalb unseres Dreiecks liegt, woher wir die Untersuchung in folgender Weise angehen wollen.

§14 Wir werden jeder Mehrdeutigkeit entgegnen, wenn wir das Dreieck azr auflösen, in welchem die Seite az mit den Winkeln zar und azr bekannt sind, woher

$$\cos arz = \frac{pqrdr - prrdq + qdp}{(qq + rr)\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}$$

werden wird, welcher Ausdruck wegen $rdr = -pdp - qdq$ in diese umgewandelt wird:

$$\cos arz = \frac{qdp - pdq}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}.$$

Außerdem werden wir aber daher auch

$$\tan ar = \frac{qdr - rdq}{pdr - rdp}$$

und

$$\tan zr = \frac{r\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}{dr}$$

erkennen.

§15 In gleicher Weise wir das Dreieck zaq aufgelöst werden können, in welcher außer der Seite az gleichermaßen die beiden Winkel zaq und zaq gegeben sind: Denn man findet

$$\cos aqz = \frac{pdr - rdp}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}},$$

$$\tan aq = \frac{qdr - rdq}{qdp - pdq}$$

und

$$\tan qz = -\frac{q\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}{dq}.$$

Schließlich haben wir schon gesehen, dass der Bogen cn das Maß des Winkels cam ist, und weil die Bogen cb und np Viertelkreise sind, wird der Bogen $bp = cn$ sein, woher

$$\tan bp = \tan mac = \frac{pdr - rdp}{qdr - rdq}$$

sein wird, woher weiter

$$\tan cp = \frac{rdq - qdr}{pdr - rdp}$$

sein wird.

§16 Was wir also bisher gefunden haben, wollen wir zusammengefasst auf die folgende Weise darstellen; und zuerst werden wir freilich für die Winkel, die aus den Punkten p, q, r gebildet werden, haben:

$$\begin{aligned}
\cos bpz &= \cos cpz = \frac{qdr - rdq}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}},\\
\cos cqz &= -\cos aqz = \frac{rdp - pdr}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}},\\
\cos arz &= -\cos brz = \frac{qdp - pdq}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}.
\end{aligned}$$

Darauf werden wir für die Lage dieser Punkte p, q, r haben:

$$\tan bp = \frac{pdr - rdp}{qdr - rdq}, \quad \tan cp = \frac{rdq - qdr}{pdr - rdp},$$
$$\tan cq = \frac{qdp - pdq}{qdr - rdq}, \quad \tan aq = \frac{qdr - rdq}{qdp - pdq},$$
$$\tan ar = \frac{qdr - rdq}{pdr - rdp}, \quad \tan br = \frac{pdr - rdp}{qdr - rdq}.$$

Es ist aber ersichtlich, wenn die Bogen pa, qb und rc gezeichnet werden würden, dass sie Viertelkreise sein werden. Schließlich wird der Bogen pz gefällig aus dem Dreieck azp gefunden, in welchem die Seite ap ein Viertelkreis ist, und außerdem ist die Seite az gegeben, zusammen mit den Winkeln azp und zpa, dessen Sinus dem Kosinus von zpb gleich wird, woher man findet:

$$\tan pz = \frac{p\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}{dp},$$

nun war aber

$$\tan qz = -\frac{q\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}{dq},$$
$$\tan rz = \frac{r\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}{dr}.$$

§17 Nachdem nun alles gefunden worden ist, was sich auf die Lage der Ebene, in welcher die zwei benachbarten Kurvenelemente gekrümmt sind und welche im Großkreis $qzrp$ enthalten ist, bezieht, wollen wir nach der Lage des Krümmungskreises, dessen Größe wir schon gefunden haben, untersuchen; weil dieser ja zum Strahl Zz normal ist und in der Ebene des Kreises $qzrp$ gelegen ist, wird seine Lage der Tangente dieses Kreises in z parallel sein und, weil er dem Mittelpunkt Z der Kugel aufgeprägt anzusehen ist, werde der Strahl vom Mittelpunkt Z der Tangente des Kreises in z parallel gezeichnet aufgefasst und in seiner Ausrichtung wird der Krümmungsradius gelegen sein.

§18 Also gehe dieser Strahl (Fig. 5)[5] der Kugel,

[5]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version

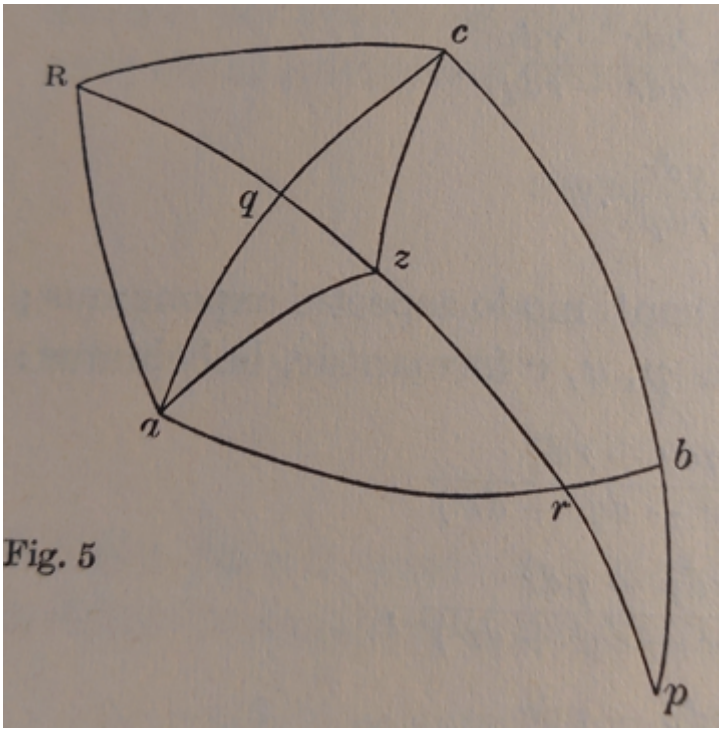


Fig. 5

der Tangente in z parallel, durch den Punkt R hindurch, welcher natürlich auf dem fortgesetzten Kreis prq liegen wird, und es ist offenkundig, dass der Bogen zr ein Viertelkreis sein wird. Daher wird der Verlauf des Bogens ar die Neigung des Krümmungsradius zur Achse Za geneigt sein, oder auch zur Achse OA, welcher Bogen sich aus dem Dreieck azR bestimmen lassen wird, weil $zR = 90^\circ$ und der Winkel $Rza = 180^\circ - \varphi$ ist, die Seite az aber gegeben ist, woher man

$$\cos aR = \frac{dp}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}$$

berechnet, dann wird aber

$$\tan zaR = \frac{rdq - qdr}{pdp}$$

sein. Davon nehme man aber den Winkel zaq weg, dessen $\tan = \frac{q}{r}$ ist, und es wird

$$\tan qaR = -\frac{dq}{dr}$$

zurückbleiben; wenn also der Bogen cR gezeichnet wird, sind im Dreieck Rac die zwei Seiten ac und aR zusammen mit dem eingeschlossenen Winkel gegeben, woher man

$$\cos cR = \sin aR \cos qaR = \frac{dr}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}$$

berechnet. Und auf dieselbe Weise wird man

$$\cos bR = -\frac{dq}{\sqrt{dp^2 + dp^2 + dr^2}}$$

finden. Nachdem aber die Winkel bekannt sind, in denen der Krümmungsradius zu den drei Hauptachsen OA, OB, OC geneigt ist, werden deren Komplemente zu 90° seine Neigungen zu den gegenüberliegenden Ebenen, natürlich BOC, AOC, AOB, geben. Und so wird die Lage des Krümmungsradius, dessen Größe

$$= \frac{ds}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}$$

ist, vollkommen bestimmt.

§19 Aber diese Bestimmungen können noch leichter gemacht werden, wenn, wie wir die Neigung des Kreises qzr zum Bogen az gegeben haben, wir auch die Neigung derselben zu den Bogen bz und cz bestimmen. Für dieses Ziel wollen wir den Winkel azb suchen, und aus dem Dreieck azb, sofern die drei Seiten bekannt sind, wird

$$\cos azb = -\frac{pq}{\sqrt{(1-pp)(1-qq)}}$$

sein. Wenn darauf im selben Dreieck

$$\sin az : \sin abz = \sin ab : \sin azb$$

wird, berechnet man daraus

$$\sin azb = \frac{r}{\sqrt{(1-pp)(1-qq)}},$$

und daher weiter

$$\tan azb = -\frac{r}{pq}.$$

Auf dieselbe Weise wird

$$\cos bzc = -\frac{qr}{\sqrt{(1-qq)(1-rr)}}$$

und

$$\sin bzc = \frac{p}{\sqrt{(1-qq)(1-rr)}},$$

und daher

$$\tan bzc = -\frac{p}{qr}.$$

Und schließlich

$$\cos cza = -\frac{pr}{\sqrt{(1-pp)(1-rr)}},$$
$$\sin cza = \frac{q}{\sqrt{(1-pp)(1-rr)}},$$

und daher

$$\tan cza = -\frac{q}{pr}.$$

§20 Weil wir also oben gefunden haben, dass

$$\begin{aligned}
\cos azr &= -\frac{dp}{\sqrt{(qq+rr)(dp^2+dq^2+dr^2)}},\\
\sin azr &= \frac{qdr-rdq}{\sqrt{(qq+rr)(dp^2+dq^2+dr^2)}},\\
\tan azr &= \frac{rdq-qdr}{dp}
\end{aligned}$$

ist, wollen wir diesen Winkel azr vom Winkel azb abziehen, und wir werden

$$\tan bzr = \frac{-rdp-pqrdq+pqqdr}{pqdp-rrdq+qrdr} = \frac{rdp-pdr}{dq}$$

finden. Auf dieselbe Weise, weil

$$\tan azq = \frac{qdr - rdq}{dp}$$

ist, ziehe man diesen Winkel vom Winkel *azc* ab, dessen Tangens $-\frac{q}{pr}$ ist, und man wird

$$\tan czq = \frac{-qdp - pqrdr + prrdq}{prdp - qqdr + qrdq} = \frac{qdp - pdq}{dr}$$

finden.

§21 Weil wir ja also alles bestimmt haben, was sich auf die Lage so der Ebene, in welchem die zwei unendlich nahen Kurvenelemente gekrümmt sind, wie des Krümmungsradius bezieht, und das sogar um vieles umfassender als es mit der gemeinen Methode zu geschehen pflegt, wollen wir anstelle des Schlussschnörkels einige Theoreme hinzufügen, die sich auf die sphärische Geometrie beziehen und zu welchen diese Abhandlung geführt hat und die der ganzen Aufmerksamkeit würdig scheinen.

THEOREM 1

§22 *Nachdem (Fig. 6)*[6] *das sphärische Dreieck abc vorgelegt worden ist, all dessen Seiten Viertelkreise sind,*

[6]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

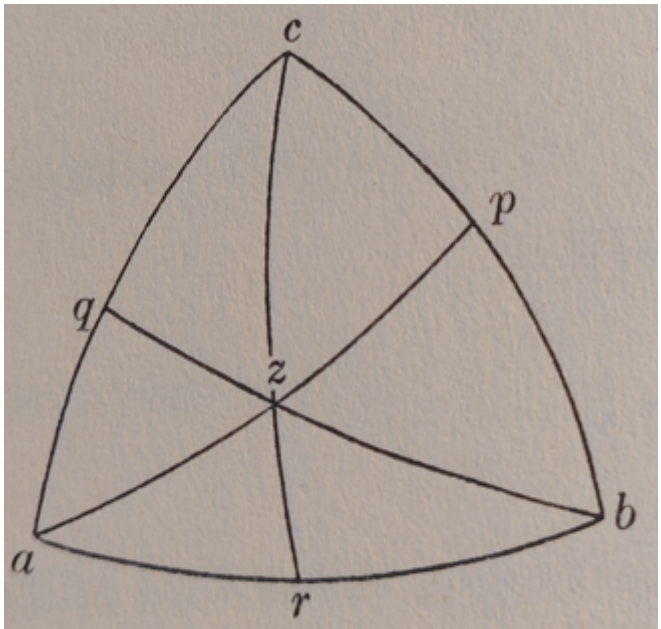


Fig. 6

wenn entweder innerhalb oder außerhalb dieses Dreiecks irgendein Punkt z genommen wird und von ihm aus zu den Ecken des Dreiecks die Bogen za, zb, zc gezeichnet werden, wird immer gelten:

$$\cos^2 za + \cos^2 zb + \cos^2 zc = 1.$$

Beweis

Aus dem Dreieck *azb*, wenn seine Seiten als bekannt angesehen werden, findet man

$$\cos baz = \frac{\cos bz}{\sin az};$$

auf dieselbe Weise wird aus dem Dreieck *azc*

$$\cos caz = \frac{\cos cz}{\sin az}$$

sein, woher, weil der Winkel *bac* ein rechter Winkel ist, wenn die Quadrate addiert werden,

$$\cos^2 baz + \cos^2 caz = 1 = \frac{\cos^2 bz + \cos^2 cz}{\sin^2 az}$$

hervorgeht und daher

$$\sin^2 az = \cos^2 bz + \cos^2 cz = 1 - \cos^2 az,$$

woher natürlich wird:

$$\cos^2 az + \cos^2 bz + \cos^2 cz = 1. \quad \text{Q.E.D.}$$

THEOREM 2

§23 *Nachdem (Fig. 6) das Kugeldreieck abc vorgelegt worden ist, all dessen Seiten Viertelkreise sind, wenn innerhalb oder außerhalb von diesem Dreieck irgendein Punkt z und von ihm aus zu den einzelnen Seiten die senkrechten Bogen zp, zq, zr gezeichnet werden, wird immer gelten:*

$$\sin^2 zp + \sin^2 zq + \sin^2 zr = 1.$$

BEWEIS

Es ist ersichtlich, dass diese Senkrechten entspringen, wenn die vorhergehenden Bogen az, bz, cz verlängert werden, woher, weil die Bogen ap, bq, cr Viertelkreise sind,

$$\sin^2 zp = \cos^2 za,$$
$$\sin^2 zq = \sin^2 zb$$

und

$$\sin^2 zr = \cos^2 zc$$

sein wird; daher, weil wir gerade

$$\cos^2 za + \cos^2 zb + \cos^2 zc = 1$$

gefunden haben, wird natürlich sein:

$$\sin^2 zp^2 + \sin^2 zq + \sin^2 zr = 1. \quad \text{Q.E.D.}$$

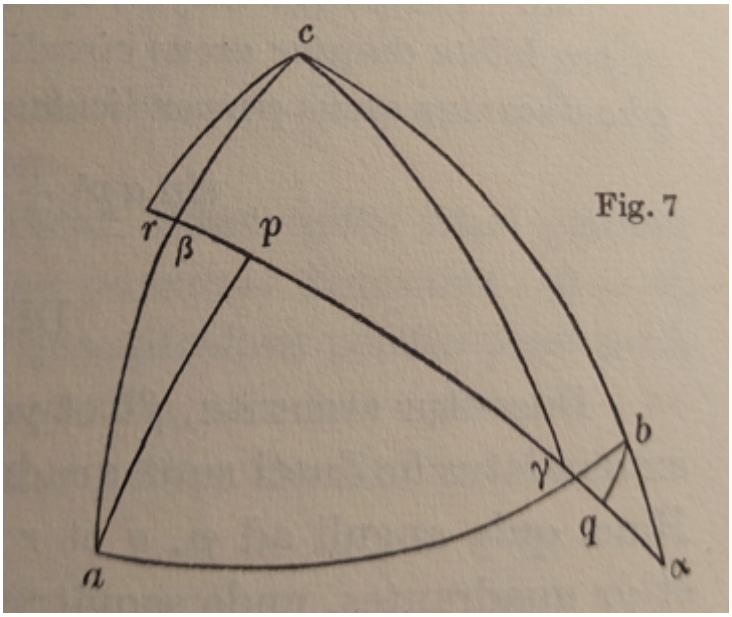
THEOREM 3

§24 *Nachdem (Fig. 7)*[7] *das Kugeldreieck abc vorgelegt worden ist, all dessen Seiten Viertelkreise sind, wenn irgendein Großkreis $\beta\gamma\alpha$ gezeichnet wird, welcher die Seiten – wenn nötig, verlängere man sie – des Dreiecks in den Punkten α, β, γ schneidet, wird er zu diesen Seiten so geneigt sein, dass gilt:*

$$\cos^2 b\alpha\gamma + \cos^2 a\beta\gamma + \cos^2 a\gamma\beta = 1.$$

BEWEIS

In dem Dreieck $\beta a\gamma$,



rechtwinklig bei a, wird

$$\cos a\beta\gamma = \sin a\gamma\beta \cos a\gamma$$

[7]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version

sein und in gleicher Weise wird im Dreieck $b\alpha\gamma$, rechtwinklig bei b,

$$\cos b\alpha\gamma = \sin b\gamma\alpha \cos b\gamma$$

sein. Man addiere nun die Quadrate dieser beiden Formeln und es wird

$$\cos^2 b\alpha\gamma + \cos^2 a\beta\gamma = \sin^2 a\gamma\beta \cos^2 a\gamma + \sin^2 b\gamma\alpha \cos^2 b\gamma$$

sein, und weil

$$b\gamma\alpha = a\gamma\beta \quad \text{und} \quad \cos^2 a\gamma + \cos^2 b\gamma = 1$$

ist, wird

$$\cos^2 b\alpha\gamma + \cos^2 a\beta\gamma = \sin^2 a\gamma\beta = 1 - \cos^2 a\gamma\beta$$

sein, woher folgt, was bewiesen werden muss, dass

$$\cos^2 b\alpha\gamma + \cos^2 a\beta\gamma + \cos^2 a\gamma\beta = 1$$

sein wird.

Beweis

§25 *Nachdem das Kugeldreieck abc vorgelegt worden ist, all dessen Seiten Viertelkreise sind, wenn nach Belieben irgendein Bogen des Großkreises $\alpha\beta\gamma$ gezeichnet wird und zu ihm von den Ecken abc aus die orthogonalen Bogen ap, bq, cr gezeichnet werden, wird immer gelten:*

$$\sin^2 ap + \sin^2 bq + \sin^2 cr = 1.$$

Beweis

Man zeichne die Bogen αa, βb und γc, welche Viertelkreise sein werden, weil ja alle Bogen von a aus zu der Seite bc hin gezeichnet Viertelkreise sind und außerdem auch normal zu ihr sind. Daher, weil die Winkel zu p, q und r auch rechte sind, werden auch die Bogen αp, βq und γr Viertelkreise sein, woher folgt, dass der Bogen $ap =$ dem Winkel $a\alpha p$ und daher

$$\sin ap = \sin a\alpha p = \cos b\alpha\gamma$$

sein wird. In gleicher Weise wird $bq = b\beta q$ und daher

$$\sin bq = \sin b\beta q = \cos a\beta\gamma$$

sein; schließlich wird $cr = c\gamma r$ und daher

$$\sin cr = \sin c\gamma r = \cos a\gamma\beta$$

sein. Daher, weil die Summe dieser Quadrate von Kosinus $= 1$ ist, wird auch gelten:

$$\sin^2 ap + \sin^2 bq + \sin^2 cr = 1. \quad \text{Q.E.D.}$$

Eine zweite Abhandlung

§1 Wenn daher die zuvor gegebene und auf der sphärischen Geometrie fußende Methode vielleicht missfällt, die ja aus weniger vertrauten Prinzipien abgeleitet worden ist, werde ich hier eine andere Methode vorlegen, die aus einem eher direkten Prinzip entnommen ist und mit welcher alle Eigenschaften von Raumkurven auch um Vieles gefälliger und klarer bewiesen werden können als mit der bisher verwendeten Methode. Diese Methode hat mir aber die Betrachtung jener Ebene an die Hand gegeben, in welcher die beiden benachbarten Kurvenelemente liegen und in welcher also die Tangente der Kurve wie ihr Krümmungsradius liegen müssen; daher werde ich die ganze Untersuchung aus der Betrachtung dieser Ebene entnehmen.

§2 Nachdem also (Fig. 8)[8] wie zuvor die drei Hauptachsen OA, OB, OC festgelegt worden sind,

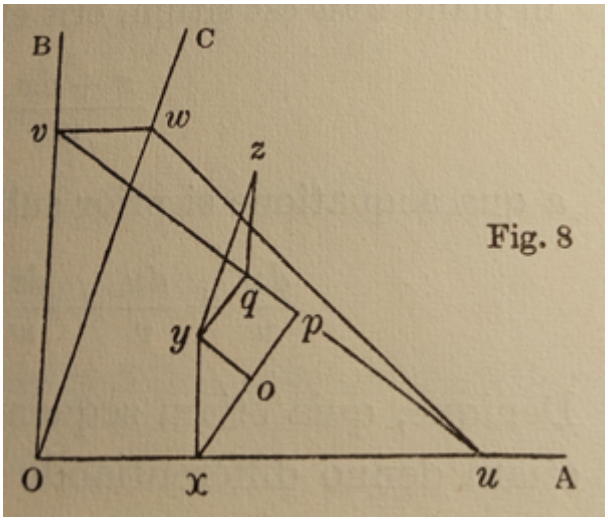


Fig. 8

denen die Koordinaten, welche jeden Punkt z der Kurve bestimmen, parallel seien, natürlich

$$Ox = x, \quad xy = y, \quad y = z,$$

führe ich sofort jene Ebene in die Rechnung ein, welche durch die beiden benachbarten Kurvenelemente bestimmt wird, oder in welcher die Kurve an

[8] Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

dieser Stelle gekrümmt ist. Also schneide diese Ebene unsere drei Achsen in den Punkten u, v und w und wir wollen die Abstände $Ou = u$, $Ov = v$, $Ow = w$ setzen, weil ja mit diesen drei Größen die Lage der Ebene vollständig bestimmt wird. Sofern also der Punkt z der Kurve in dieser Ebene gefunden wird, wird die Gleichung zwischen den drei Koordinaten x, y, z eine von einer Dimension von dieser Form

$$Ax + By + Cz = D$$

sein; um diese vollständig zu bestimmen, wollen wir zuerst den Punkt z zum Punkt u überführen und es wird $x = u$, $y = 0$ und $z = 0$ werden, woher $Au = D$ sein wird. In gleicher Weise, nachdem der Punkt z zum Punkt v hin überführt worden ist, wird $x = 0$, $y = v$, $z = 0$ werden, woher $Bv = D$ sein wird. Schließlich wird nach Überführen des Punktes z zum Punkt w hin $z = w$, $x = 0$, $y = 0$ sein, woher $Cw = D$ sein wird. Weil also daher

$$A = \frac{D}{u}, \quad B = \frac{D}{v}, \quad C = \frac{D}{w}$$

ist, wird die lokale Gleichung für die Ebene uvw diese sein:

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1.$$

§3 Wenn daher nun wie zuvor das Kurvenelement $= ds$ gesetzt wird und durch dieses Element die übrigen so bestimmt werden, dass

$$dx = pds, \quad dy = qds, \quad dz = rds$$

ist, wird natürlich $pp + qq + rr = 1$ sein, und daher durch Differenzieren

$$pdp + qdq + rdr = 0.$$

Man überführe nun den Punkt z der Kurve zu einem unendlich nahen, welchem die Koordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ entsprechen; weil ja dieser sehr nahe Punkt wieder in der Ebene uvw liegt, wird auch

$$\frac{x + dx}{u} + \frac{y + dy}{v} + \frac{z + dz}{w} = 1$$

sein; wenn von dieser Gleichung die erste abgezogen wird, werden wir haben:

$$\frac{dx}{u} + \frac{dy}{v} + \frac{dz}{w} = 0 \quad \text{und daher} \quad \frac{p}{u} + \frac{q}{v} + \frac{r}{w} = 0.$$

Schließlich, weil auch das folgende Element in derselben Ebene liegen muss, wird auch erneut durch Differenzieren

$$\frac{dp}{u} + \frac{dq}{v} + \frac{dr}{w} = 0$$

sein. Weiter lässt sich aber durch Differenzieren nicht fortschreiten, weil die folgenden Elemente natürlich auf einen anderen Punkten fallen können.

§4 Also gibt uns die Betrachtung dieser Ebene uvw mit der Natur der Kurve zusammen diese drei Gleichungen an die Hand:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} &= 1. \\ \text{II.} \quad & \frac{p}{u} + \frac{q}{v} + \frac{r}{w} &= 0, \\ \text{III.} \quad & \frac{dp}{u} + \frac{dq}{v} + \frac{dr}{w} &= 0, \end{aligned}$$

aus welchen Gleichungen wir umgekehrt die drei Größen u, v und w durch die Koordinaten der Kurve und deren Differentiale bestimmen können. Für dieses Ziel wollen wir diese Kombination verwenden: II. dr−III. r, welche uns

$$\frac{pdr - rdp}{u} + \frac{qdr - rdq}{v} = 0$$

oder

$$\frac{pdr - rdp}{u} = \frac{rdq - qdr}{v}$$

liefern wird, woher man dieses Verhältnis ableitet:

$$\frac{1}{u} : \frac{1}{v} = (rdq - qdr) : (pdr - rdp).$$

Wir wollen also

$$\frac{1}{u} = \frac{rdq - qdr}{t} \quad \text{setzen, es wird} \quad \frac{1}{v} = \frac{pdr - rdp}{t}$$

sein, welche Werte in die zweite Gleichung eingesetzt

$$r\frac{(pdq - qdp)}{t} + \frac{r}{w} = 0$$

geben, woher wir

$$\frac{1}{w} = \frac{qdp - pdq}{t}$$

errechnen.

§5 Aber von diesen für $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$, $\frac{1}{w}$ gefundenen Werten aus, wenn sie in der ersten Gleichung eingesetzt werden, werden wir zu dieser Gleichung gelangen:

$$x(rdq - qdr) + y(pdr - rdp) + z(qdp - pdq) = t,$$

welche uns als den Wert der Größe t darbietet, sodass wir später diesen Buchstaben t als bekannt benutzen können, wo es freilich notwendig sein wird, die Werte der Formeln $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$, $\frac{1}{w}$ in die Rechnung einzuführen.

§6 Nun wollen wir also nach Bestimmen der Lage der Ebene uvw (Fig. 9)[9] ihre Neigung zu unseren Hauptachsen AOB, BOC, COA ausfindig machen.

[9]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

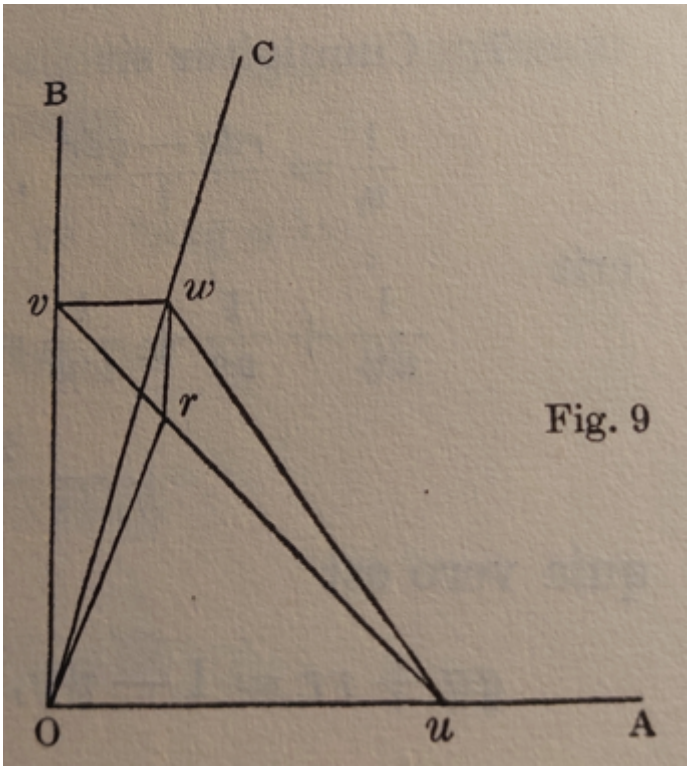


Fig. 9

Und zuerst, weil diese Ebene die Ebene AOB in der Geraden uv schneidet, welche $= \sqrt{uu + vv}$ ist, zeichne man von O aus zu dieser Geraden uv die Senkrechte Or, und es wird $uv : Ou = Ov : Or$ sein, woher

$$Or = \frac{uv}{\sqrt{uu + vv}}$$

wird. Nun zeichne man die Gerade rw, und weil das Dreieck Owr vertikal ist, wird die Gerade wr auch normal zur Gerade uv sein, woher der Winkel Orw die Neigung der Ebene uvw zur Ebene AOB sein wird; daher, weil der Winkel wOr ein rechter ist und $Ow = w$ ist, wird die Hypothenuse

$$rw = \sqrt{\frac{uuvv + uuww + vvww}{uu + vv}}$$

sein, woher wir

$$\cos Orw = \frac{Or}{rw} = \frac{uv}{\sqrt{uuvv + uuww + vvww}}$$

oder

$$\cos Orw = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{ww}{uu}+\frac{ww}{vv}}} = \frac{1}{w\sqrt{\frac{1}{uu}+\frac{1}{vv}+\frac{1}{ww}}}$$

berechnen. Und so wird die Neigung der Ebene uvw zur Ebene AOB bekannt, deren Kosinus natürlich

$$\frac{1}{w\sqrt{\frac{1}{uu}+\frac{1}{vv}+\frac{1}{ww}}}$$

ist. In gleicher Weise erschließt man analog die Neigung der Ebene uvw zur Ebene BOC, deren Kosinus

$$\frac{1}{u\sqrt{\frac{1}{uu}+\frac{1}{vv}+\frac{1}{ww}}}$$

ist; und schließlich die Neigung der Ebene uvw zur Ebene COA, deren Kosinus

$$\frac{1}{v\sqrt{\frac{1}{uu}+\frac{1}{vv}+\frac{1}{ww}}}$$

ist.

§7 Weil also

$$\frac{1}{u} = \frac{rdq - qdr}{t}, \quad \frac{1}{v} = \frac{pdr - rdp}{r} \quad \text{und} \quad \frac{1}{w} = \frac{qdp - pdq}{t}$$

ist, wird

$$\frac{1}{uu} + \frac{1}{vv} + \frac{1}{ww} = \frac{dp^2(qq+rr) + dq^2(pp+rr) + dr^2(pp+qq)}{} - \frac{2pqdpdq + 2prdpdr + 2qrdqdr}{tt}$$

sein; weil also

$$qq + rr = 1 - pp, \quad pp + rr = 1 - qq \quad \text{und} \quad pp + qq = 1 - rr$$

ist, wird nach Einsetzen dieser Werte die Formel in zwei Teile aufgeteilt werden, der eine positiv, der andere negativ; und freilich wird der positive

$$\frac{dp^2 + dq^2 + dr^2}{tt}$$

sein, die negativen Terme werden hingegen

$$\frac{-ppdp^2 - qqdq^2 - rrdr^2 - 2pqdpdq - 2prdpdr - 2qrdqdr}{tt}$$

sein; weil diese offenkundig das Quadrat dieser Formel ist:

$$\frac{pdp + qdq + rdr}{t},$$

verschwindet sie wegen

$$pdp + qdq + rdr = 0$$

von selbst, sodass wir haben:

$$\sqrt{\frac{1}{uu} + \frac{1}{vv} + \frac{1}{ww}} = \sqrt{\frac{dp^2 + dq^2 + dr^2}{tt}},$$

weswegen die oben gefundenen Neigungen so kurz und knapp ausgedrückt werden:

I. Der Kosinus der Neigung zur Ebene $AOB = \dfrac{qdp - pdq}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}$,

II. Der Kosinus der Neigung zur Ebene $BOC = \dfrac{rdq - qdr}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}$,

III. Der Kosinus der Neigung zur Ebene $COA = \dfrac{pdr - rdp}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}$.

Und so haben wir schon die wesentlichen Eigenschaften erhalten, die mit der vorhergehenden Methoden erst nach vielen Umwegen gefunden worden sind.

§8 Um nun auch die übrigen Eigenschaften leichter zu finden, wollen wir der Kürze wegen den Winkel $Ouv = \alpha$ setzen, und wir werden

$$\sin\alpha = \frac{v}{\sqrt{uu + vv}}, \quad \cos\alpha = \frac{u}{\sqrt{uu + vv}} \quad \text{und} \quad \tan\alpha = \frac{v}{u}$$

haben. Weiter setze man die Neigung oder den Winkel $Orw = \vartheta$, und es wird

$$\sin\vartheta = \frac{Ow}{rw} = \frac{w\sqrt{uu+vv}}{\sqrt{uuvv+uuww+vvww}},$$
$$\cos\vartheta = \frac{Or}{rw} = \frac{uv}{\sqrt{uuvv+uuww+vvww}}$$

und

$$\tan\vartheta = \frac{w\sqrt{uu+vv}}{uv}$$

sein, wo es bemerken ist, dass die Werte konstant bleiben, während wir vom Punkt z der Kurve aus durch die zwei folgenden Elemente hindurch fortschreiten.

§9 Nachdem diese Dinge vorausgeschickt worden sind (Fig. 8), wollen wir den Ort des Punktes z in der Ebene uvw untersuchen, und weil $Ox = x$, $xy = y$, $yz = z$ ist, wollen wir von den Punkten x und y zur Geraden uv hin die Senkrechten xp und yq zeichnen, und weil ja $xu = u - x$ und der Winkel $xup = \alpha$ ist, wird

$$xp = (u-x)\sin\alpha \quad \text{und} \quad up = (u-x)\cos\alpha$$

sein. Dann wird aber nach Fällen des Lotes yo von y aus zu xp

$$yo = y\sin\alpha \quad \text{und} \quad xo = y\cos\alpha$$

sein. Daher weil $pq = yo$ und $yq = po$ ist, wird die Strecke

$$uq = (u-x)\cos\alpha + y\sin\alpha$$

und

$$yq = (u-x)\sin\alpha - y\cos\alpha$$

werden. Weil nun also $yz = z$ eine Vertikale ist, ist nach Zeichnen der Gerade qz das Dreieck yzq nicht nur normal zur Ebene AOB ausgerichtet, sondern auch die Geraden yq und zq werden zur Gerade uv senkrecht sein und der Winkel yqz wir der Neigung ϑ gleich werden, woher die Gerade

$$qz = \frac{(u-x)\sin\alpha - y\cos\alpha}{\cos\vartheta}$$

sein wird, oder es wird auch

$$qz = \frac{yz}{\sin\vartheta} = \frac{z}{\sin\vartheta}$$

sein, woher diese zwei Formeln notwendig gleich sind, woher folgt, dass

$$\frac{z\sqrt{uuvv + uuww + vvww}}{w\sqrt{uu+vv}} = \frac{((u-x)\sin\alpha - y\cos\alpha)\sqrt{uuvv + uuww + vvww}}{uv}$$

oder

$$\frac{z}{w\sqrt{uu+vv}} = \frac{(u-x)v - uy}{uv\sqrt{uu+vv}}$$

sein wird, welche Gleichung auf diese zurückgeführt wird:

$$\frac{z}{w} = \frac{(u-x)}{u} - \frac{y}{v},$$

welche die zuerst aufgestellte Gleichung ist, nämlich

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1.$$

§10 Weil also die Gerade zq in der Ebene uvw zur Gerade uv normal ist, wollen wir in dieser Ebene für den Punkt z die Gerade uq als Abszisse und qz als Ordinate ansehen und wollen $uq = X$ und $qz = Y$ nennen, weshalb wir

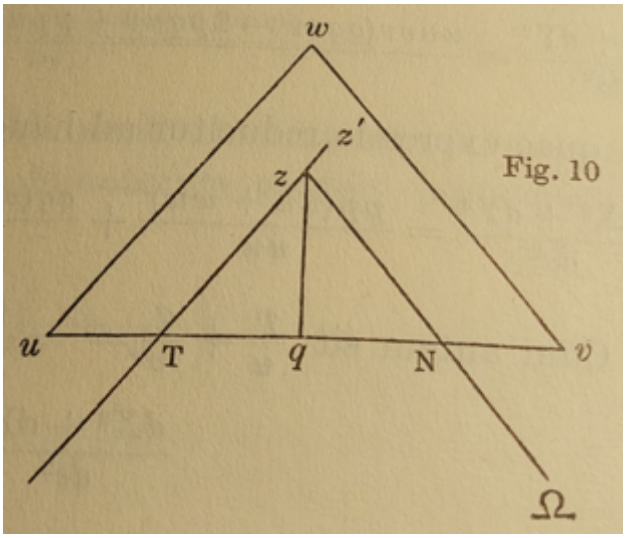
$$X = (u-x)\cos\alpha + y\sin\alpha$$

und

$$Y = \frac{(u-x)\sin\alpha - y\cos\alpha}{\cos\vartheta} = \frac{z}{\sin\vartheta}$$

haben. Damit all das nun besser verstanden werden kann, wollen wir diese Ebene uvw mit dem Punkt z allein in die Tischebene werfen.

§11 Nun wollen wir also (Fig. 10)[10] durch Differenzieren durch das Kurvenelement zz' hindurch fortschreiten,



und wegen

$$dx = pds, \quad dy = qds \quad \text{und} \quad dz = rds,$$

weil ja die Größen u, v, w mit den Winkeln α und ϑ konstant bleiben, wird

$$dX = -pds\cos\alpha + qds\sin\alpha$$

und

$$dY = -\frac{pds\sin\alpha + qds\cos\alpha}{\cos\vartheta} = \frac{rds}{\sin\vartheta}$$

sein, welche zwei Werte von dY notwendigerweise genauso gleich sein müssen, und daher wird

$$-\frac{p\sin\alpha + q\cos\alpha}{\cos\vartheta} = \frac{r}{\sin\vartheta}$$

sein, welche Gleichung nach Einsetzen der Werte in diese übergeht:

$$\frac{p}{u} + \frac{q}{v} + \frac{r}{w} = 0,$$

[10]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

welche Gleichung die zweite anfangs aufgestellte ist. Außerdem, weil wir das Kurvenelement $= ds$ gesetzt haben, was nun aus den Koordinaten X und Y

$$ds = \sqrt{dX^2 + dY^2}$$

wird, ist es notwendig, dass $dX^2 + dY^2 = ds^2$ wird. Es ist aber

$$dX = \frac{ds(qv - pu)}{\sqrt{uu + vv}}$$

und

$$dY = -\frac{ds(pv + qu)\sqrt{uuvv + uuww + vvww}}{uv\sqrt{uu + vv}}$$

oder auch

$$dY = \frac{rds\sqrt{uuvv + uuww + vvww}}{w\sqrt{uu + vv}}.$$

Daher wird aber

$$\frac{dX^2 + dY^2}{ds^2} = \frac{uuvv(qqvv - 2pquv + ppuu) + (ppvv + 2pquv + qquu)(uuvv + uuww + vvww)}{uuvv(uu + vv)},$$

welcher Ausdruck auf diesen zurückgeführt wird:

$$\frac{dX^2 + dY^2}{ds^2} = \frac{pp(uu + ww)}{uu} + \frac{qq(vv + ww)}{vv} + \frac{2pqww}{uv} = pp + qq + ww\left(\frac{p}{u} + \frac{q}{v}\right)^2.$$

Weil aber $\frac{p}{u} + \frac{q}{v} = -\frac{r}{w}$ ist, wird diese Form resultieren:

$$\frac{dX^2 + dY^2}{ds^2} = pp + qq + rr = 1.$$

Und so ist klar, dass in der Tat $dX^2 + dY^2 = ds^2$ ist.

§12 Wenn wir nun $dY = PdX$ setzen, ist bekannt, dass der Krümmungsradius der Kurve, sofern er auf die Gerade $zN\Omega$ fällt,

$$z\Omega = -\frac{dX(1 + PP)^{\frac{3}{2}}}{dP}$$

ist, so dass Ω der Mittelpunkt des Kreises ist, der unsere Kurve in z berührt. Gerade haben wir aber gesehen, dass in der Tat

$$dX\sqrt{1+PP} = ds$$

wird, woher, weil

$$dX = \frac{ds(qv-pu)}{\sqrt{uu+vv}}$$

ist,

$$\sqrt{1+PP} = \frac{ds}{dX} = \frac{\sqrt{uu+vv}}{qv-pu}$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{1+PP}} = \frac{qv-pu}{\sqrt{uu+vv}}$$

sein wird, woher wir durch Differenzieren schließen:

$$-\frac{PdP}{(1+PP)^{\frac{3}{2}}} = \frac{vdq-udp}{\sqrt{uu+vv}},$$

woher man

$$(1+PP)^{\frac{3}{2}} = \frac{PdP\sqrt{uu+vv}}{udp-vdq}$$

ableitet, und daher wird der Ausdruck für den Krümmungsradius

$$z\Omega = \frac{PdX\sqrt{uu+vv}}{vdq-udp} = \frac{dY\sqrt{uu+vv}}{vdq-udp}$$

sein, und, nachdem anstelle von dY der entsprechende Wert eingesetzt worden ist, wird man schließlich den Krümmungsradius

$$z\Omega = \frac{ds(pv+qu)\sqrt{uuvv+uuww+vvww}}{uv(udp-vdq)}$$

erhalten.

§13 Um nun diesen Ausdruck des Krümmungsradius von den Elementen u, v und w zu befreien, wollen wir den Zähler und Nenner jeweils durch uvw teilen und wir werden den Zähler

$$= ds(pv + qu)\sqrt{\frac{1}{uu} + \frac{1}{vv} + \frac{1}{ww}}$$

erhalten, der Nenner wird hingegen

$$\frac{udp - vdq}{w}$$

sein. Oben haben wir schon gezeigt, dass

$$\sqrt{\frac{1}{uu} + \frac{1}{vv} + \frac{1}{ww}} = \frac{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}{t}$$

ist, woher der Zähler

$$= ds\left(\frac{pv}{t} + \frac{qu}{t}\right)\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}$$

wird. Weil nun

$$\frac{v}{t} = \frac{1}{pdr - rdp} \quad \text{und} \quad \frac{u}{t} = \frac{1}{rdq - qdr}$$

ist, wird unser Zähler

$$ds\left(\frac{p}{pdr - rdp} + \frac{q}{rdq - qdr}\right)\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}$$
$$= \frac{rds(pdq - qdp)}{(pdr - rdp)(rdq - qdr)}\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}$$

sein; der Nenner hingegen, wegen

$$\frac{u}{w} = \frac{qdp - pdq}{rdq - qdr} \quad \text{und} \quad \frac{v}{w} = \frac{qdp - pdq}{pdr - rdp},$$

wird diese Form annehmen:

$$(qdp - pdq)\left(\frac{dp}{rdq - qdr} - \frac{dq}{pdr - rdp}\right) =$$
$$(qdp - pdq)((pdp + qdq)dr - (dp^2 + dq^2)r).$$

Weil aber

$$pdp + qdq = -rdr$$

ist, wird dieser Nenner sein:

$$-\frac{r(qdp - pdq)(dp^2 + dq^2 + dr^2)}{(rdq - qdr)(pdr - rdp)}.$$

§14 Weil wir also so den Zähler wie den Nenner entwickelt haben, wird daher der Krümmungsradius

$$z\Omega = \frac{ds}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}$$

berechnet werden, welcher Wert vollkommen mit dem übereinstimmt, welcher mit der oberen Methode gefunden worden war. Es bleibt also übrig, dass wir auch seine Lage in Bezug auf die drei Hauptachsen bestimmen. Hier haben wir aber gesehen, dass er auf die verlängerte Normale fällt, wenn freilich sein Ausdruck positiv war. Die Subnormale ist aber

$$qN = \frac{YdY}{dX} = PY,$$

und wenn wir darüber hinaus die Tangente zT zeichnen, wird die Subtangente

$$qT = \frac{YdX}{dY} = \frac{Y}{P}$$

sein. Aber die Lage dieser Tangente zT haben wir in der vorhergehenden Abhandlung so einfach bestimmt, dass die Kosinus der Winkel, in welchen sie zu den Hauptachsen OA, OB und OC geneigt ist, p, q und r sind.

§15 Wir wollen zuerst die Tangente zT betrachten, für deren Lage in Bezug auf die Gerade uv wir den Tangens des Winkels $qTz = \frac{qz}{qT} = P = \frac{dY}{dX}$ haben; dann aber, weil das Kurvenelement ds ist, wenn wir der Kürze wegen den Winkel $qTz = \tau$ setzen, wird

$$\sin\tau = \frac{dY}{ds} = -\frac{(pv + qu)\sqrt{uuvv + uuww + vvww}}{uv\sqrt{uu + vv}}$$

und

$$\cos\tau = \frac{dX}{ds} = \frac{qv - pu}{\sqrt{uu + vv}}$$

sein, woher

$$\tan\tau = -\frac{(pv + qu)\sqrt{uuvv + uuww + vvww}}{uv(qv - pu)}$$

wird. Weiter wird für die Subtangente $qT = \frac{Y}{\tan\tau}$ sein, es ist aber

$$Y = \frac{(v(u - x) - yu)\sqrt{uuvv + uuww + vvww}}{uv\sqrt{uu + vv}},$$

woher die Subtangente

$$qT = \frac{(v(u - x) - uy)(pu - qv)}{(pv + qu)\sqrt{uu + vv}}$$

wird, welche von der Abszisse X abgezogen den Raum

$$uT = \frac{(py + q(u - x))\sqrt{uu + vv}}{pv + qu}$$

zurücklässt. Schließlich werde

$$dX : ds = qT \quad \text{zu} \quad zT,$$

und daher wird die Tangente selbst als

$$zT = -\frac{(v(u - x) - uy)}{pv + qu} = \frac{uy - v(u - x)}{pv + qu}$$

hervorgehen.

§16 In derselben Weise wollen wir die Lage der Normale zN bestimmen, und zuerst wird freilich der Winkel $qNz = 90^\circ - \tau$ sein; dann aber die Subnormale

$$qN = YP = Y\tan\tau = \frac{(v(u - x) - uy)\sqrt{uuvv + uuww + vvww}}{uuvv(pu - qv)\sqrt{uu + vv}},$$

die Normale wird aber

$$zN = \frac{Y}{\cos\tau} = \frac{(v(u - x) - uy)(pv + qu)\sqrt{uuvv + uuww + vvww}}{uv(qv - pu)}$$

sein. Schließlich, wenn wir die Subnormale zur Abszisse X addieren, wird die Strecke

$$UN = \frac{(u-x)(pvv(uu+ww)+quvww)\sqrt{uu+vv}}{uuvv(pu-qv)}$$
$$-\frac{y(quu(vv+ww)+puvww)\sqrt{uu+vv}}{uuvv(pu-qv)}$$

hervorgehen.

§17 Wir wollen nun wiederum (Fig. 11)[11] diese Figur auf die geneigte Ebene uvw werfen, und weil die Gerade zy zur Ebene AOB senkrecht ist, wird nach Zeichnen der Gerade yT das Dreieck zyT bei y rechtwinklig sein,

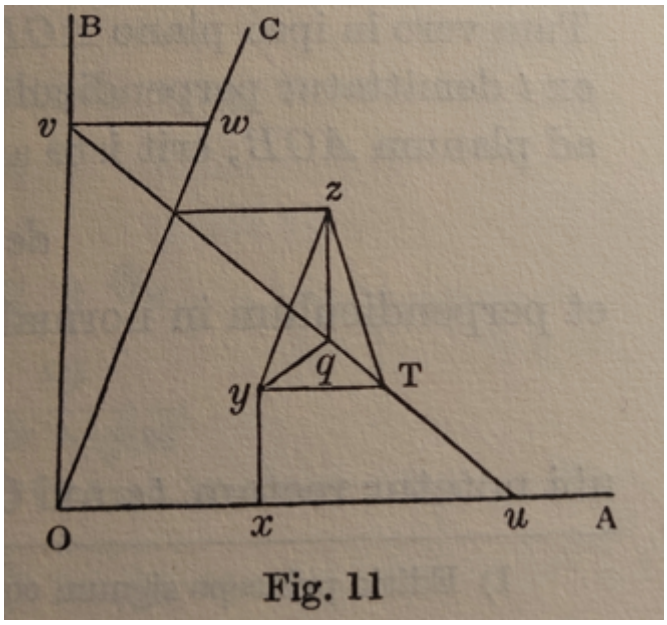


Fig. 11

woher der Kosinus des Winkels yzT $\frac{zy}{zT}$ sein. Aber dieser Winkel ist jenem gleich, in welchem die Tangente zT zur Achse OC geneigt ist, weil zy parallel zu OC ist. Weil also

$$zy = z \quad \text{und} \quad zT = \frac{uy - v(u-x)}{pv+qu}$$

[11] Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

ist, aus der ersten Gleichung

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1$$

aber

$$\frac{z}{w} = \frac{u-x}{u} - \frac{y}{v} = \frac{v(u-x) - uy}{uv}$$

wird, wird

$$zT = -\frac{uvz}{w(pv+qu)}$$

sein; dann aber aus der zweiten Gleichung:

$$\frac{p}{u} + \frac{q}{v} + \frac{r}{w} = 0,$$

es wird

$$\frac{r}{w} = -\frac{(pv+qu)}{uv}$$

sein, nach Einsetzen welchen Wertes $zT = \frac{z}{r}$ wird, weshalb wir $\cos yzT = r$ haben werden. Oben haben wir aber gesehen, dass der Kosinus des Winkels, in welchem die Tangente der Kurve zur Achse OC geneigt ist, $= +r$ ist; aber es ist anzumerken, dass dort die Tangente nach oben verlängert worden ist, wohingegen sie hier nach unten gerichtet ist, weshalb das Vorzeichen des Kosinus geändert wird.

§18 Weil ja hier nur die Lage behandelt wird, welche die Tangente der Kurve in Bezug auf die drei Achsen hat, wird sich anstelle der Tangente zT irgendeine andere selbiger parallele annehmen lassen, welche zu unseren Achsen in gleicher Weise geneigt sein wird. Deswegen (Fig. 12)[12] zeichne man in der geneigten Ebene uvw von u aus die Gerade ut, der Tangente der Kurve parallel,

[12]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

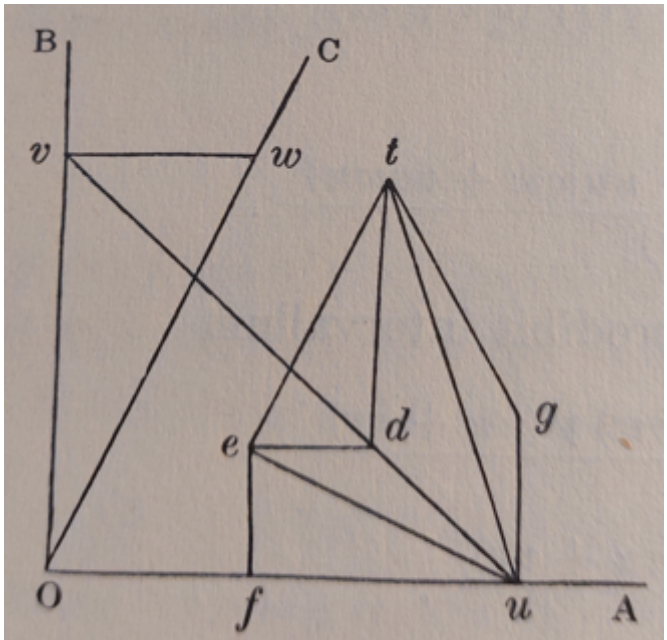


Fig. 12

sodass der Winkel $vut = \tau$ ist. Man nehme aber diese Gerade ut der Rechnung wegen $= 1$, so dass, wenn von t aus zu uv das Lot td gefällt wird,

$$ud = \cos\tau \quad \text{und} \quad td = \sin\tau$$

ist. Dann zeichne man in der Ebene AOB von d aus zur Gerade ad die Normale de und zu ihr fälle man von t aus das Lot te, und weil der Winkel tde die Neigung der Ebene uvw zur Ebene AOB ist, wird dieser Winkel $tde = \vartheta$ sein, woher das Intervall

$$de = td\cos\vartheta = \sin\tau\cos\vartheta$$

und die Senkrechte zur Normale

$$te = \sin\tau\sin\vartheta$$

wird; dort bemerke man, dass die Gerade te der Achse OC parallel ist. Daher, wenn die Gerade ue gezeichnet wird, wird das Dreieck teu bei e rechtwinklig sein, woher der Kosinus des Winkels ute

$$\cos ute = \frac{te}{ut} = \sin\vartheta \sin\tau$$

sein wird. Oben haben wir gesehen, dass

$$\sin\vartheta = \frac{w\sqrt{uu+vv}}{\sqrt{uuvv+uuww+vvww}}$$

ist; dann war aber

$$\sin\tau = -\frac{(pv+qu)\sqrt{uuvv+uuww+vvww}}{uv\sqrt{uu+vv}},$$

welcher Ausdruck wegen

$$pv+qu = -r\cdot\frac{uv}{w}$$

in diesen überführt wird:

$$\sin\tau = \frac{r\sqrt{uuvv+uuww+vvww}}{w\sqrt{uu+vv}},$$

woher

$$\sin\vartheta\sin\tau = r = \cos ute$$

wird, das heißt, der Kosinus des Winkels, in welchem die Tangente, nach oben ausgerichtet, zur Achse OC geneigt ist, $= r$, (man vergleiche Paragraph 17); aber die Gerade ue wird den Sinus desselben Winkels darbieten, so dass

$$ue = \sqrt{1-rr} = \sqrt{pp+qq}$$

ist, welcher auch aus dem Dreieck edu bestimmt werden kann, in welchem

$$ud = \cos\tau \quad \text{und} \quad de = \sin\tau\cos\vartheta$$

ist, woher

$$ue = \sqrt{1-\sin^2\vartheta\sin^2\tau}$$

wird. Daher wird aber der Tangens des Winkels due abgeleitet, nämlich

$$\tan due = \frac{de}{ud} = \cos\vartheta\tan\tau,$$

um welchen zu entwickeln, wir der Kürze wegen festlegen wollen:

$$\sqrt{uuvv + uuww + vvww} = \Theta,$$

und es wird

$$\cos\vartheta = \frac{uv}{\Theta} \quad \text{und} \quad \tan\tau = \frac{\Theta r}{w(qv - pu)}$$

sein, woher

$$\tan due = \frac{r \cdot uv}{w(qv - pu)}$$

wird. Daher, weil der Tangens des Winkels Ouv $\frac{v}{u}$ ist, werden wir daher den Tangens des Winkels Oue finden, nämlich

$$\tan Oue = \frac{vw(qv - pu) - ruuv}{uw(qv - pu) + ruvv},$$

der Zähler welches Bruches wegen

$$\frac{p}{u} + \frac{r}{w} = -\frac{q}{v} \quad \text{oder} \quad ur + wp = -\frac{q \cdot uw}{v}$$

auf diese Form zurückgeführt wird:

$$qw(uu + vv),$$

der Nenner hingegen, wegen

$$qw + rv = -\frac{vwp}{u},$$

wird reduziert auf:

$$-pw(uu + vv),$$

woher man

$$\tan Oue = -\frac{q}{p}$$

berechnet.

§21 Nun fälle man von e aus zu Ou das Lot ef; und weil

$$ue = \sqrt{pp + qq}$$

ist, dann aber

$$\sin euf = -\frac{q}{\sqrt{pp+qq}} \quad \text{und} \quad \cos uef = \frac{p}{\sqrt{pp+qq}},$$

daher wird

$$ef = -q \quad \text{und} \quad uf = p$$

sein. Wenn daher nun die Gerade tf gezeichnet aufgefasst wird, wird sie zu Ou normal sein und daher das Dreieck tfu bei f rechtwinklig, woher man den Kosinus des Winkels Out, in welchem die Tangente tu zur Achse OA geneigt ist, $= p$ erhalten wird, genauso wie oben. In derselbe Weise, wenn von u aus die parallele und ef gleiche Gerade ug gezeichnet wird, wird auch das Dreieck tug bei g rechtwinklig, woher der Kosinus des Winkels tug, in dem unsere Tangente zur Achse OB geneigt ist, $= -q$ ist. Und so sind diese Neigungen, welche sich mit der oberen Methode von selbst zeigten, mit dieser Methode über viele Umwege schließlich gefunden.

§21 Nachdem all dies erledigt worden ist, wollen wir auch sehen, wie die Normale zur Kurve zN zu den drei Achsen geneigt ist. Für dieses Ziel fasse man auch vom Punkt u aus in der Ebene uvw die Gerade gezeichnet auf, die jener Normale zN parallel ist und die ebenso der Einheit gleich gesetzt werde: Und es wird in der Tat nicht nötig sein, eine eigene Figur zu zeigen. Denn wenn nun die Gerade ut für die Richtung dieser Normale genommen wird, kann alles dasselbe bleiben wie zuvor, wenn nur der Winkel $dut = 90^\circ + \tau$ gesetzt wird. Und so wird es nur nötig sein, in den vorhergehenden Formeln $\cos\tau$ anstelle von $\sin\tau$ und $-\sin\tau$ anstelle von $\cos\tau$ zu schreiben. Und so wird

$$td = \cos\tau \quad \text{und} \quad ud = -\sin\tau$$

sein. Und daher wird weiter

$$de = \cos\tau\cos\vartheta \quad \text{und} \quad te = \cos\tau\sin\vartheta$$

sein. Und daher wird weiter

$$de = \cos\tau\cos\vartheta \quad \text{und} \quad te = \cos\tau\sin\vartheta$$

sein. Aber mit den zuvor verwendeten Reduktionen werden wir

$$\sin\tau = \frac{\Theta r}{w\sqrt{uu+vv}} \quad \text{und} \quad \cos\tau = \frac{qv-pu}{\sqrt{uu+vv}},$$

weiter

$$\sin\vartheta = \frac{w\sqrt{uu+vv}}{\Theta} \quad \text{und} \quad \cos\vartheta = \frac{uv}{\theta}$$

haben, mithilfe welcher Werte

$$ud = -\frac{\Theta r}{w\sqrt{uu+vv}},$$
$$dt = \frac{qv-pu}{\sqrt{uu+vv}},$$
$$de = \frac{uv(qv-pu)}{\Theta\sqrt{uu+vv}}$$

und

$$te = \frac{w(qv-pu)}{\Theta}$$

und daher

$$\tan due = -\frac{uvw(qv-pu)}{\Theta\Theta r} = \frac{de}{ud} = -\frac{\cos\vartheta}{\tan\tau}$$

sein wird.

§22 Nun drückt aber der Winkel ute die Neigung des Krümmunsradius zur Achse OC aus, dessen Kosinus

$$= \frac{w(qv-pu)}{\Theta}$$

sein wird; weil dort

$$\Theta = \sqrt{uuvv + uuww + vvww}$$

ist, wird

$$\Theta = uvw\sqrt{\frac{1}{uu} + \frac{1}{vv} + \frac{1}{ww}} = \frac{uvw}{t}\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}$$

sein, woher jener Kosinus

$$= t\frac{qv - pu}{uv\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}$$

sein wird. Man teile so den Zähler wie den Nenner durch uv, und dieser Ausdruck wird

$$\cos ute = \frac{\frac{qt}{u} - \frac{pt}{v}}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}$$

werden.

§23 Oben haben wir aber gesehen, dass

$$\frac{t}{u} = rdq - qdr \quad \text{und} \quad \frac{t}{v} = pdr - rdp$$

ist, nach Einführen welcher Werte der Zähler unserer Formel $-dr$ sein wird, woher offenkundig der Kosinus des Winkels, in welchem der Krümmungsradius zur Achse OC geneigt ist,

$$= -\frac{dr}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}$$

berechnet, wo der Unterschied des Vorzeichens nicht zu beachten sind, weil das Vorzeichen von selbst geändert wird, je nachdem ob wir den Krümmunsradius nach unten oder nach oben gerichtet annehmen.

§24 Weil also die Gerade

$$te = -\frac{dr}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^3}}$$

ist, wird die Gerade

$$ue = \frac{\sqrt{dp^2 + dq^2}}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}$$

sein, aber

$$\tan eud = -\frac{uvw(qv - pu)}{\Theta\Theta r}.$$

Zuvor war aber

$$\Theta = \frac{uvw}{t}\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2},$$

woher dieser Tangens

$$-\frac{(qv - pu)tt}{uvwr(dp^2 + dq^2 + dr^2)} = -\frac{\left(\frac{qt}{u} - \frac{pt}{v}\right)t}{wr(dp^2 + dq^2 + dr^2)}$$

werden wird, der Zähler welches Bruchs in $+tdr$ transformiert wird, woher dieser Tangens

$$\tan due = \frac{dr(qdp - pdq)}{r(dp^2 + dq^2 + dr^2)}$$

werden wird. Wir wollen diesen Winkel vom Winkel Ouv abziehen, dessen Tangens

$$\frac{v}{u} = \frac{rdq - qdr}{pdr - rdp}$$

ist, und nach allen Reduktionen, die wir bisher benutzt haben, findet man schließlich

$$\tan Oue = -\frac{dq}{dp},$$

also

$$\sin Oue = -\frac{dq}{\sqrt{dp^2 + dq^2}} \quad \text{und} \quad \cos Oue = \frac{dp}{\sqrt{dp^2 + dq^2}}.$$

Weil also

$$ue = \frac{\sqrt{dp^2 + dq^2}}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}$$

ist, wird

$$uf = ue \cos Oue = \frac{dp}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}$$

und

$$ef = -\frac{dq}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}$$

sein.

§25 Weil aber $ut = 1$ ist, drückt die Gerade uf den Kosinus des Winkels fut aus, welchen der Krümmungsradius mit der Achse OA bildet, die Gerade $fe = ug$ drückt hingegen den Kosinus des Winkels gut aus, welchen der Krümmungsradius mit der Achse OB bildet, weshalb wir haben werden:

$$\text{Der Kosinus der Neig. des Kr. Rad. zur Achse} \quad OA = \frac{dp}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}},$$

$$\text{Der Kosinus der Neig. des Kr. Rad. zur Achse} \quad OB = \frac{dq}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}},$$

$$\text{Der Kosinus der Neig. des Kr. Rad. zur Achse} \quad OC = \frac{dr}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}.$$

Weiterhin scheint diese Methode daher besonders bemerkenswert, weil durch die hier dargelegten Reduktionen die höchst komplexen Formeln, wider jeder Erwartung, auf sehr einfache zurückgeführt werden.

§26 Damit all diese Reduktionen leichter durchgeführt werden können, wird es förderlich sein, die folgenden Eigenschaften sorgfältig bemerkt zu haben. Weil nämlich

$$\frac{t}{u} = rdq - qdr,$$
$$\frac{t}{v} = pdr - rdp,$$
$$\frac{t}{w} = qdp - pdq$$

ist, während, wie wir angenommen haben,

$$t = x(rdq - qdr) + y(pdr - rdp) + z(qdp - pdq)$$

ist, sodass t eine differenzielle Größe bezeichnet, wird daher

$$\begin{aligned}
\text{I.}\quad & \frac{pt}{v} - \frac{qt}{u} = p(pdr - rdp) - q(rdq - qdr) = dr,\\
\text{II.}\quad & \frac{qt}{w} - \frac{rt}{v} = q(qdp - pdq) - r(pdr - rdp) = dp,\\
\text{III.}\quad & \frac{rt}{u} - \frac{pt}{w} = r(rdq - qdr) - p(qdp - pdq) = dq
\end{aligned}$$

sein. Darauf erfahren aber auch die folgenden Formeln eine gefällige Reduktion

$$\begin{aligned}
\text{I.}\quad \frac{tdp}{v} - \frac{tdq}{u} &= dp(pdr - rdp) - dq(rdq - qdr)\\
&= -r(dp^2 + dq^2 + dr^2),\\
\text{II.}\quad \frac{tdq}{w} - \frac{tdr}{v} &= dq(qdp - pdq) - dr(pdr - rdp)\\
&= -p(dp^2 + dq^2 + dr^2),\\
\text{III.}\quad \frac{tdr}{u} - \frac{tdp}{w} &= dr(rdq - qdr) - dp(qdp - pdq)\\
&= -q(dp^2 + dq^2 + dr^2).
\end{aligned}$$

Außerdem sind aber diese Reduktionen bemerkenswert:

$$\begin{aligned}
\frac{tt}{uu} + \frac{tt}{vv} &= dr^2 + rr(dp^2 + dq^2 + dr^2),\\
\frac{tt}{vv} + \frac{tt}{ww} &= dr^2 + pp(dp^2 + dq^2 + dr^2),\\
\frac{tt}{ww} + \frac{tt}{uu} &= dr^2 + qq(dp^2 + dq^2 + dr^2).
\end{aligned}$$

§27 Schließlich, weil wir ja diese Bestimmungen auf ein um die Hauptachsen herum konstruiertes Parallelepiped übertragen haben, von welcher Art eines in der Figur (Fig. 13)[13] dargeboten wird, wo, je nachdem welche bestimmte Werte den drei Seiten OP, OQ, OR zugeteilt werden,

[13]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

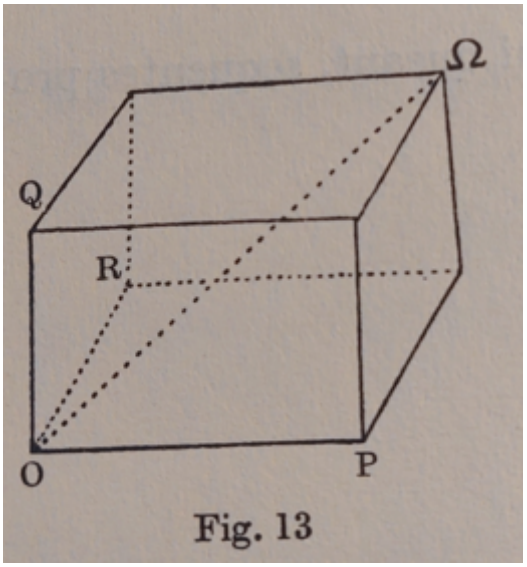


Fig. 13

die Diagonalen $O\Omega$ die Lage der wichtigen sich auf die Kurve beziehenden Geraden darstellen: Was bisher hier gesagt worden ist, lässt sich in den Parallelepiped erfassen.

I.) Wenn die Seiten des Parallelepipeds

$$OP = x, \quad OQ = y, \quad OR = z$$

gesetzt werden, gibt die Diagonale, die $\sqrt{xx + yy + zz}$ sein wird, die Lage der vom Punkt O aus zum Punkt z der Kurve gezeichneten Gerade.

II.) Wenn die Seiten des Parallelepipeds

$$OP = p, \quad OQ = q, \quad OR = r$$

genommen werden, dann wird die Diagonale $O\Omega$ die Lage der Tangente der Kurve im Punkt z geben, oder diese Tangente wird der Diagonale $O\Omega$ parallel sein; diese Diagonale wird aber

$$\sqrt{pp + qq + rr} = 1$$

sein.

III.) Wenn die Seiten des Parallelepipeds wie folgt festgelegt werden:

$$OP = \frac{dp}{ds}, \quad OQ = \frac{dq}{ds}, \quad OR = \frac{dr}{ds},$$

dann wird die Diagonale des Parallelogramms die Richtung des Krümmungsradius im Punkt z geben, oder sie wird ihm parallel sein; die Diagonale selbst wird aber

$$\frac{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}{ds}$$

sein, sodass der Krümmungsradius selbst $\frac{1}{O\Omega}$ ist.

IV) Wenn die Seiten des Parallelepipeds wie folgt festgelegt werden:

$$OP = \frac{rdq - qdr}{ds}, \quad OQ = \frac{pdr - rdp}{ds}, \quad OR = \frac{qdp - pdq}{ds},$$

dann wird die Diagonale $O\Omega$ die Normale zur Ebene sein, in welcher die beiden sehr nahe Kurvenelemente gekrümmt sind: Die Diagonale selbst wird wiederum

$$\frac{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}{ds}$$

sein. Dieses letzte Theorem folgt natürlich daher, dass die Normale zur Krümmungsebene genauso zu den drei Achsen geneigt ist wie die Ebene selbst zu den gegenüberliegenden Hauptebenen.